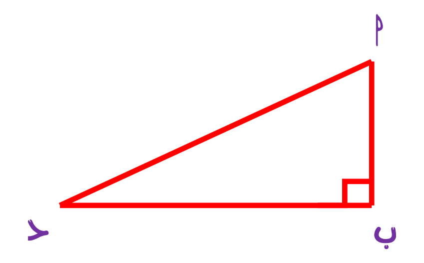
النسب المثلثية للزاوية للزاويه الحاده

تذكران

فى المثلث القائم الزاوية ومن فيثاغورس نجد أن :

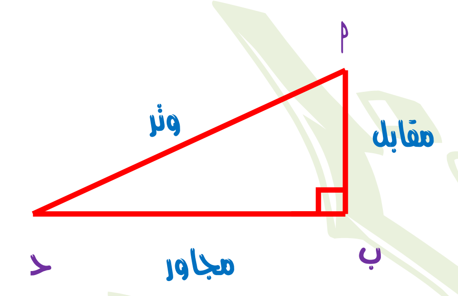


فإن (أ جـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب جـ)^2

، (ب جـ)^2 = (أ جـ)^2 − (أ ب)^2

، (أ ب)^2 = (أ جـ)^2 − (ب جـ)^2

فى الشكل المقابل :

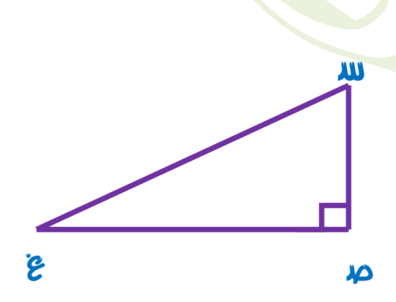


١) جا جـ = مقابل / وتر = أ ب / أ جـ

٢) جتا جـ = مجاور / وتر = ب جـ / أ جـ

٣) ظا جـ = مقابل / مجاور = أ ب / ب جـ

أكمل : ١) جا ع = ...



٢) جتا ع = ...

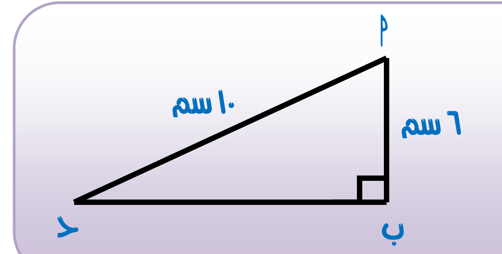
٣) ظا ع = ...

٤) جا س = ...

٥) جتا س = ... ظا س = ...

أ/أحمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال فى الشكل المقابل أوجد جا جـ ، جتا جـ ، ظا جـ





ب جـ = $\sqrt{(١٠)^٢ - (٦)^٢}$ = $\sqrt{١٠٠ - ٣٦}$ = ٨

∴ جا جـ = $\frac{٦}{١٠}$ = $\frac{٣}{٥}$

جتا جـ = $\frac{٨}{١٠}$ = $\frac{٤}{٥}$

ظا جـ = $\frac{٦}{٨}$ = $\frac{٣}{٤}$

ملحوظه هامه : فى أى مثلث قائم الزاويه ظا س = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

إذا كان جا س = $\frac{٢}{٧}$ ، جتا س = $\frac{٥}{٨}$

فإن ظا س = $\frac{٢}{٥}$

أكمل من الشكل المقابل :

١) أ جـ = $\sqrt{(٤)^٢ + (٣)^٢}$ = $\sqrt{١٦ + ٩}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

٢) جا أ = ...

٣) جتا أ = ...

٤) ظا أ = ...

٥) جاجـ = ...

٦) جتا جـ = ...   ٧) ظا جـ = ...

أ
٣
ب   ٤سم   حـ

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٢ فى الشكل المقابل م ب جـ مثلث فية ق (∠م) = ٩٠°

أثبت أن جتا جـ جتا ب – جا جـ جا ب = صفر **الحل**

من فيثاغورس

ب جـ = √((٢٠)² + (١٥)²) = √(٤٠٠ + ٢٢٥) = ٢٥

جتا جـ = ١٥/٢٥ = ٣/٥

جتا ب = ٢٠/٢٥ = ٤/٥

جا جـ = ٢٠/٢٥ = ٤/٥

جا ب = ١٥/٢٥ = ٣/٥

∴ جتا جـ جتا ب – جا جـ جا ب = ٣/٥ × ٤/٥ – ٤/٥ × ٣/٥

= ١٢/٢٥ – ١٢/٢٥ = صفر

مثال٣ م ب جـ مثلث فيه ق (∠ب) = ٩٠° ، ٥ ظا م + ١ = ١٣ أحسب قيمة جا م جتا جـ + جتا م جا جـ



∵ ٥ ظا م + ١ = ١٣

٥ ظا م = ١٣ – ١

٥ ظا م = ١٢ ظا م = ١٢/٥

م جـ = √((١٢)² + (٥)²) = √(١٤٤ + ٢٥) = √١٦٩ = ١٣

جا م = ١٢/١٣

جتا جـ = ١٢/١٣

جتا م = ١٢/١٣

جا جـ = ١٢/١٣

جا م جتا جـ + جتا م جا جـ = ١٢/١٣ × ١٢/١٣ + ٥/١٣ × ٥/١٣

= ١٤٤/١٦٩ + ٢٥/١٦٩

= ١٦٩/١٦٩ = ١

مثال٤ س ص ع قائم الزاوية فى ص ، ٥ جتا س – ٣ = ٠ أوجد جا²ع + جا²س **الحل**

∵ ٥جتاس = ٣ ∴ جتا س = ٣/٥

، ص ع = √(٢٥ – ٩) = ٤

∴ جا²ع + جا²س =

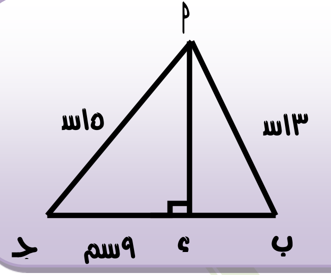
أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

تدريب٢ س ص ع فيه ق (∠ص) = ٩٠° ، ٢ جتا س − ١ = صفر أوجد جا٢ س + جتا٢ س الحــل

مثال في الشكل المقابل : أوجد قيمة

$$\frac{\text{ظا}(\angle \text{جـ ا ء}) + \text{ظا}(\angle \text{ب ا ء})}{\text{ظا}(\angle \text{جـ ا ء}) - \text{ظا}(\angle \text{ب ا ء})}$$

الحــــل



ا ء = $\sqrt{225 - 81} = 12$

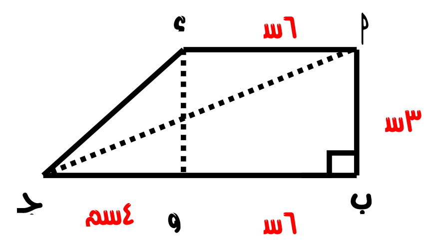
ب ء = $\sqrt{169 - 144} = 5$

ظا(∠جـ ا ء) = $\frac{9}{12}$ ، ظا(∠ب ا ء) = $\frac{5}{12}$

$$\frac{\text{ظا}(\angle \text{جـ ا ء}) + \text{ظا}(\angle \text{ب ا ء})}{\text{ظا}(\angle \text{جـ ا ء}) - \text{ظا}(\angle \text{ب ا ء})} = \frac{\frac{9}{12} + \frac{5}{12}}{\frac{9}{12} - \frac{5}{12}} = \frac{7}{2}$$

مثال٦ ا ب جـ ء شبة منحرف فيه $\overline{\text{ا ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق (∠ب) = ٩٠° ، فإذا كان ا ب = ٣سم ، ا ء = ٦سم ، ب جـ = ١٠سم . أثبت أن جتا(∠ء جـ ب) − ظا(∠ا جـ ب) الحــل

العمل نرسم $\overline{\text{ا جـ}}$ ، ء و ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ ء جـ = $\sqrt{16+9} = 5$



، جتا(∠ء جـ ب) = $\frac{4}{5}$

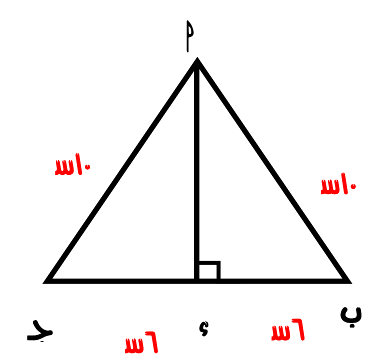
، ظا(∠ا جـ ب) = $\frac{3}{10}$

∴ جتا(∠ء جـ ب) − ظا(∠ا جـ ب) = $\frac{4}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٧ ﻫ ب جـ مثلث فيه : ﻫ ب = ﻫ جـ = ١٠سم ، ب جـ = ١٢سم ، $\overline{\text{ﻫ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ أثبت أن

١) جا² جـ + جتا² جـ = ١ ٢) جاب + جتا جـ > ١ **الحـــل**



∵ ﻫ ب = ﻫ جـ ، $\overline{\text{ﻫ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ب ء = ء جـ = ٦سم

فى المثلث ﻫ ء جـ ﻫ ء = $\sqrt{١٠٠ - ٣٦}$ = $\sqrt{٦٤}$ = ٨

∴ جا جـ = $\frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$ ، جتا جـ = $\frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$

∴ جا² جـ + جتا² جـ = $\left(\frac{٤}{٥}\right)^٢ + \left(\frac{٣}{٥}\right)^٢ = \frac{١٦}{٢٥} + \frac{٩}{٢٥} = \frac{٢٥}{٢٥} = ١$

ثانياً فى المثلث أ ب ء جاب = $\frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$

∴ جاب + جتا جـ = $\frac{٤}{٥} + \frac{٣}{٥} = \frac{٧}{٥}$

∴ جاب + جتا جـ > ١

مثال ٨ ﻫ ب جـ مثلث قائم الزاويه فى ب ، ﻫ ب = ٦سم ، ظا جـ = $\frac{٣}{٤}$ أوجد

١) طول كل من $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ﻫ جـ}}$ ٢) جا ﻫ + جتا ﻫ **الحـــل**

∵ ظا جـ = $\frac{٣}{٤}$



$\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{٣}{٤}$ $\frac{٦}{\text{ب جـ}} = \frac{٣}{٤}$

∴ ب جـ = $\frac{٦ \times ٤}{٣}$ = ٨

من فيثاغورس ﻫ جـ = $\sqrt{٨^٢ + ٦^٢}$ = $\sqrt{٦٤ + ٣٦}$ = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠

جا ﻫ + جتا ﻫ = $\frac{٨}{١٠} + \frac{٦}{١٠} = \frac{١٤}{١٠} = \frac{٧}{٥}$

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

تدريب ٣ م ب جـ مثلث قائم الزاويه فى ب ، جا م = ٠.٦ أوجد قيمة جا م جتا جـ + جتا م جا جـ

مثال ٩ إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متتامتين ٢ : ٧ فأوجد القياس الستينى لكل منهما .

بفرض أن الزاويتين هما ٢ س ، ٧ س

وحيث أن الزاويتين متتامتين ∴ ٢ س + ٧ س = ٩٠°

∴ ٩ س = ٩٠ ∴ س = $\frac{٩٠}{٩}$ = ١٠

الزاوية الأولى = ٢ س = ٢ × ١٠ = ٢٠° الزاوية الثانية = ٧ س = ٧ × ١٠ = ٧٠°

مثال ١٠ إذا كانت النسبة بين زاويتين متكاملتين كنسبة ١ : ٣ أوجد القياس الستينى لكل منهما .

بفرض أن الزاويتين هما س ، ٣ س

وحيث أن الزاويتين متكاملتين ∴ س + ٣ س = ١٨٠

٤ س = ١٨٠

∴ س = $\frac{١٨٠}{٤}$ ∴ س = ٤٥

الزاوية الأولى = س = ٤٥° الزاوية الثانية = ٣ س = ٣ × ٤٥ = ١٣٥°

تدريب ٤ إذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا الداخلة مثلث ٣ : ٤ : ٧ فأوجد القياس الستينى لكل زاوية

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

تمارين على النسب المثلثية للزاوية

١) إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متكاملتين ٣ : ٥ فأوجد القياس الستينى لكل منهما .

٢) إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متتامتين ٢ : ٧ فأوجد القياس الستينى لكل منهما .

٣) إذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا الداخلة لمثلث ١ : ٣ : ٥ فأوجد القياس الستينى لكل زاوية .

٤) س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ع ، س ع = ٧ سم ، س ص = ٢٥ سم أوجد قيمة كل من .

١) ظا س × ظا ص ٢) جا^2 س + جا^2 ص

٥) ٢ ب جـ قائم الزاوية فى ب ، ٥ جا جـ – ١ = ٣ أوجد جميع الدوال المثلثية للزاويتين ٢ ، جـ

ثم أحسب قيمة جا ٢ جتا جـ + جتا ٢ جا جـ

٦) س ص ع مثلث قائم الزوية فى ص فيه : س ع = ١٣ سم ، ص ع = ١٢ سم أوجد قيمة كل من :

١) جا س جتا ع + جتا س جا ع ٢) ١ + ظا^2 س

٧) ٢ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فإذا كان : ٢ ٢ ب = $\sqrt{3}$ ٢ جـ فأوجد النسب المثلثية الاساسية للزاوية جـ

٨) ٢ ب جـ ء شبة منحرف فيه $\overline{٢ ء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، ق (د ب) = ٩٠° فإذا كان ٢ ب = ٣ سم ، ٢ ء = ٦ سم

، ب جـ = ١٠ سم فأثبت أن جتا (د ء جـ ب) – ظا (د ٢ جـ ب) = $\frac{1}{2}$

٩) أكمل ما يأتى

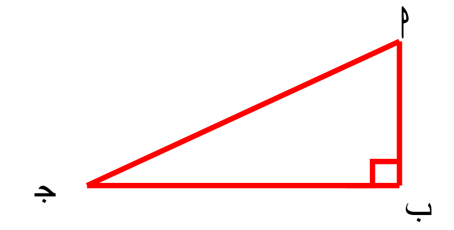
١) ٨ $''$ ٣٨ $'$ ٨٥° = ... بالدرجات

٢) ٣٨.١٢° = ... بالدرجات والدقائق والثوانى

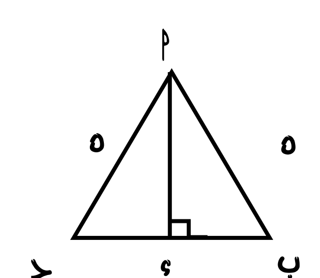
٣) فى الشكل المقابل :

إذا كان : ٢ ب جـ مثلثاً قائم الزاوية فى ب فإن : جا ٢ = ...

جـ
٥
٢ ١٢ ب

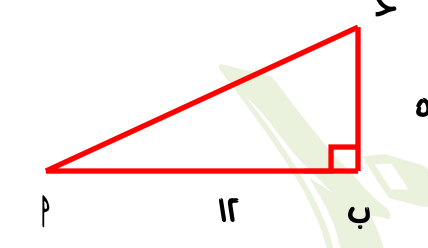


٤) فى الشكل المقابل : $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ = جتا ....



٥) فى الشكل المقابل :

جتا ب = ... ، جا ب = ...



١٠) **فى الشكل المقابل :**

أوجد قيمة جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ

---

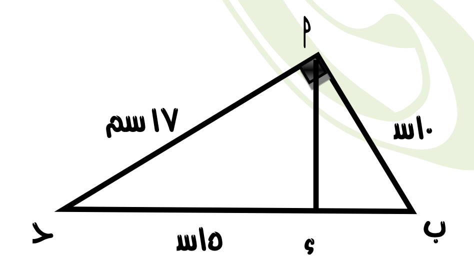
١١) إذا كان س ص ع مثلث قائم ازاويه فى ع ، س ع = ٧سم ، س ص = ٢٥سم

أوجد قيمة كل من ١) ظا س × ظا ص ٢) $جا^2$س + $جا^2$ص

---

١٢) فى الشكل المقابل : $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ، أ جـ = ٧سم ، ء جـ = ١٥سم

، أ ب = ١٠سم أوجد قيمة : ٣ظا جـ + جا ب



---

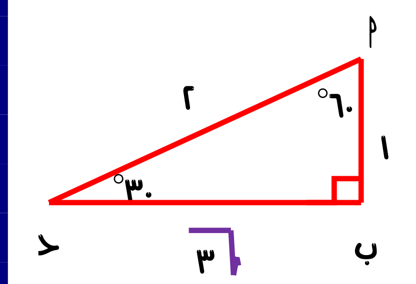
١٣) أ ب جـ ء شبة منحرف متساوى الساقين فيه : $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أ ء = ٤سم ،

أ ب = ٥سم ، ب جـ = ١٢ سم . أثبت أن $\frac{\text{٥ ظا ب جتا جـ}}{\text{جتا}^2\text{جـ + جتا}^2\text{ب}}$ = ٣

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

فى الشكل المقابل : (النسب المثلثية للزاويتين ٣٠° ، ٦٠°)

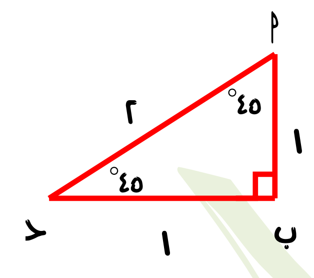


جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ جتا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

ظا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

فى الشكل المقابل : (النسب المثلثية للزاوية ٤٥°)



جا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

جتا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ظا ٤٥° = ١

مثال١ بدون أستخدام الحاسبة أوجد قيمة : جا ٣٠ + جتا ٦٠ + ظا ٤٥   **الحـــــل**

جا ٣٠ + جتا ٦٠ + ظا ٤٥ = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ + ١ = ٢

مثال٢ بدون أستخدام الحاسبة أوجد قيمة : جا ٣٠ جتا ٦٠ + جا^{٢} ٦٠   **الحـــــل**

جا ٣٠ جتا ٦٠ + جا^{٢} ٦٠ = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ + $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$

= $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{٤}{٤}$ = ١

مثال٣ بدون أستخدام الحاسبة أوجد قيمة : ٤ جتا ٣٠ جا ٦٠ – ظا^{٢} ٦٠ + جا ٣٠   **الحـــــل**

٤ جتا ٣٠ جا ٦٠ – ظا^{٢} ٦٠ + جا ٣٠ = ٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ – $(\sqrt{٣})^{٢}$ + $\frac{١}{٢}$

= ٤ × $\frac{٣}{٤}$ – ٣ + $\frac{١}{٢}$ = ٣ – ٣ + $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٤ بدون أستخدام الحاسبة أوجد قيمة : (جتا ٤٥ + جا ٦٠) (جا ٤٥ – جتا ٣٠) الحـــــل

(جتا ٤٥ + جا ٦٠) (جا ٤٥ – جا ٣٠) = $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{-1}{4}$

ملحوظة هامة : جا م = جتا (٩٠ – م)

مثال١ جا ٣٠ = جتا ...٦٠...   ،   مثال٢ جتا ٤٥ = جا ...٤٥...   ،   مثال٣ جا ٢٠ = جتا ...٧٠...

تدريب جا٣٥ = جتا ......   تدريب جا .... = جتا ٦٥

تدريب ١ بدون أستخدام الحاسبة أوجد قيمة : جا ٣٠ + جتا ٦٠ – ظا ٤٥ الحـــــل

تدريب ٢ بدون أستخدام الحاسبة أوجد قيمة : جا^2 ٣٠ + جتا^2 ٣٠ الحـــــل

تدريب ٣ بدون أستخدام الحاسبة أوجد قيمة : ٢ جا ٣٠ جتا ٦٠ – ظا ٤٥ الحـــــل

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

المتطابقات المثلثية :

مثال١ بدون استخدام الحاسبة أثبت أن : جا ٦٠ = ٢ جا ٣٠ جتا ٣٠ **الحـــــل**

الطرف الأيمن = جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

الطرف الأيسر = ٢ جا ٣٠ جتا ٣٠ = ٢ × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ الطرفان متساويان

مثال٢ بدون استخدام الحاسبة أثبت أن : جا٢ ٦٠ + جا٢ ٤٥ + جا٢ ٣٠ = جتا٢ ٣٠ + $\frac{١}{٣}$ ظا٢ ٦٠ − جتا٢ ٦٠

الطرف الأيمن = جا٢ ٦٠ + جا٢ ٤٥ + جا٢ ٣٠ = $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^٢ + \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^٢ + \left(\frac{١}{٢}\right)^٢$

= $\frac{٣}{٤}$ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٦}{٤}$ = $\frac{٣}{٢}$

الطرف الأيسر = جتا٢ ٣٠ + $\frac{١}{٣}$ ظا٢ ٦٠ − جتا٢ ٦٠ = $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^٢ + \frac{١}{٣} \times (\sqrt{٣})^٢ - \left(\frac{١}{٢}\right)^٢$

= $\frac{٣}{٤}$ + $\frac{١}{٣}$ × ٣ − $\frac{١}{٤}$

= $\frac{٣}{٤}$ + ١ − $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{٢}$

∴ الطرفان متساويان

مثال٣ بدون استخدام الحاسبة أثبت أن : ظا ٦٠ = $\frac{٢ \text{ ظا } ٣٠}{١ - \text{ظا}^٢ ٣٠}$ **الحـــــل**

الطرف الأيمن = ظا ٦٠ = $\sqrt{٣}$

الطرف الأيسر = $\frac{٢ \text{ ظا } ٣٠}{١ - \text{ظا}^٢ ٣٠}$ = $\frac{٢ \times \frac{١}{\sqrt{٣}}}{١ - \left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)^٢}$ = $\frac{\frac{٢}{\sqrt{٣}}}{\frac{٢}{٣}}$ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ × $\frac{٣}{٢}$ = $\sqrt{٣}$

∴ الطرفان متساويان

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٤ بدون أستخدام الحاسبة أثبت أن : ٣ ظا² ٤٥ – ٢ جا ٦٠ جتا ٣٠ = $\frac{٣}{٢}$ **الحـــل**

الطرف الأيمن = ٣ ظا² ٤٥ – ٢ جا ٦٠ جتا ٣٠ = ٣ × (١)² – ٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= ٣ × ١ – ٢ × $\frac{٣}{٤}$ = ٣ – $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$

الطرف الأيسر = $\frac{٣}{٢}$

∴ **الطرفان متساويان**

مثال المثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى ب ومتساوى الساقين فإن ظا أ = ...١.....

تدريب١ بدون أستخدام الحاسبة أثبت أن : جتا ٦٠ = ٢ جتا² ٣٠ – ١ **الحـــل**

تدريب٢ بدون أستخدام الحاسبة أثبت أن : ظا² ٦٠ – ظا² ٤٥ = جا² ٦٠ + ٢ جتا² ٦٠ + ٢ جا ٣٠

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

إيجاد الزاوية إذا علمت النسب المثلثية لهذه الزاوية

مثال١ أوجد قيمة س حيث س زاوية حادة إذا كان جا س = $\frac{١}{٢}$ الحــــل

باستخدام الحاسبة shift sin $\frac{١}{٢}$ = ٣٠

∴ س = ٣٠°

مثال٢ أوجد قيمة س حيث س زاوية حادة إذا كان جا س = ٠.٨ الحــــل

باستخدام الحاسبة shift sin ٠.٨ = ,,,

∴ س = ٥٣° ٧/ ٤٨//

مثال٣ أوجد قيمة س حيث س زاوية حادة إذا كان جتا س = ٠.٢٥ الحــــل

باستخدام الحاسبة shift cos ٠.٢٥= ,,,

∴ س = ٧٥° ٣١/ ٢٠//

مثال٤ أوجد قيمة س حيث س زاوية حادة إذا كان ظا س = ٠.٦٩ الحــــل

باستخدام الحاسبة shift tan ٠.٦٩ = ,,,

∴ س = ٣٤° ٣٦/ ٢٠//

مثال٥ أوجد قيمة س حيث س زاوية حادة إذا كان ظا س = ٤ جتا ٦٠ جا ٣٠ الحــــل

ظا س = ٤ × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ ∴ ظا س = ١ ∴ س = ٤٥°

مثال٦ أوجد قيمة س حيث س زاوية حادة إذا كان جا س = جا ٦٠ جتا ٣٠ – جتا ٦٠ جا ٣٠

جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ – $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٣}{٤}$ – $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ جا س = $\frac{١}{٢}$ ∴ س = ٣٠°

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٧ أوجد قيمة س حيث س زاوية حادة إذا كان

٣ جا س = جا ٤٥ جتا ٤٥ + جا ٣٠ جتا ٦٠ + جتا^{٢} ٣٠

٣ جا س = جا ٤٥ جتا ٤٥ + جا ٣٠ جتا ٦٠ + جتا^{٢} ٣٠

$$٣ \text{ جا س} = \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$$

$$٣ \text{ جا س} = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} = \frac{٣}{٢}$$

$\therefore$ ٣ جا س = $\frac{٣}{٢}$ $\therefore$ جا س = $\frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٣}$ $\therefore$ جا س = $\frac{١}{٢}$ $\therefore$ س = ٣٠°

تدريب أوجد قيمة س حيث س زاوية حادة إذا كان ٢ جا س = جا ٣٠ جتا ٣٠ جتا ٦٠ + جتا ٣٠ جا ٦٠

مثال ٨ أوجد قيمة س حيث س زاوية حادة إذا كان س جا ٣٠ جتا^{٢} ٤٥ = جا^{٢} ٦٠

س جا ٣٠ جتا^{٢} ٤٥ = جا^{٢} ٦٠

$$\text{س} \times \frac{١}{٢} \times \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢} = \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$$

$$\text{س} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤}$$

س $\times \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$ $\therefore$ س = $\frac{٣}{٤} \times \frac{٤}{١}$ $\therefore$ س = ٣

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

تدريب٢ أوجد قيمة س حيث س زاوية حادة إذا كان س $جا^2 45 = ظا^2 60$ [الحـــــل

مثال٩ إذا كان جا ٢س = $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ فإن س = ... الحـــــل ☐

٢س = ٦٠ ∴ س = ٣٠°

مثال١٠ إذا كان جتا (س+١٠) = $\frac{1}{2}$ فإن س = ... الحـــــل ☐

س+١٠ = ٦٠ ∴ س = ٦٠ − ١٠ = ٥٠ ∴ س = ٥٠°

مثال١١ إذا كان ٢جا س = $\sqrt{3}$ فإن س = ... الحـــــل ☐

∵ ٢جا س = ٣ بالقسمة على ٢ ∴ جا س = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ∴ س = ٦٠°

تدريب٣ إذا كان جتا (٣س+٦) = جا٣٠ فإن س = ... الحـــــل ☐

مثال١٢ فى الشكل المقابل : ﻡ ب جـ ء مستطيل فيه ﻡ ب = ١٥سم ، ﻡ جـ = ٢٥سم أوجد ق (∠ ﻡ جـ ب)

، مساحة المستطيل ﻡ ب جـ ء الحـــــل ☐

∵ جا (∠ ﻡ جـ ب) = $\frac{١٥}{٢٥}$ ∴ ق(∠ ﻡ جـ ب) = ٣٦° ٥٢َ ١٢ً

ب جـ = $\sqrt{(٢٥)^2 - (١٥)^2}$ = $\sqrt{٦٢٥ - ٢٢٥}$ = $\sqrt{٤٠٠}$ = ٢٠

∴ مساحة المستطيل ﻡ ب جـ ء = الطول × العرض = ١٥ × ٢٠ = ٣٠٠سم٢

تمارين على النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

١) أكمل مايأتى :

١) جا٦٠ + جتا٣٠ – ظا٦٠ = ...

٢) ٢ جا٣٠ جتا٦٠ – ظا٤٥ = ...

٣) جا^{٢}٣٠ + جتا^{٢}٣٠ = ...

٤) جا٤٥ – جتا ٤٥ = ...

٥) جا٣٠ جتا٦٠ + جا^{٢}٦٠ = ...

٦) ٤ جتا٣٠ ظا٦٠ = ...

٧) جا٤٥ جتا٤٥ + جا٣٠ جتا٦٠ - جتا^{٢}٣٠ = ...

٨) ظا^{٢}٦٠ + جتا٦٠ - ٥ ظا٤٥ = ...

٩) جا٢٥ = جتا ....

١٠) جا٤٥ = جتا ....

١١) جتا (س – ١٠) = $\frac{1}{2}$ فإن س = ...

١٢) جا (س + ١٥) = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ فإن س = ...

١٣) ظا (س + ١٠) = $\sqrt{3}$ فإن س = ...

١٤) إذا كان س زاوية حادة وكان : جاس = $\frac{1}{2}$ فإن جا ٢س = ...

١٥) إذا كان ٢ جاس = ظا٦٠ فإن س = ...

١٦) ظا س = $\frac{1}{3}$ فإن ظا ٢س = ...

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

٢) بدون أستخدام الحاسبة أثبت كلاً ممايأتى :

١) جتا ٦٠ = ٢ جتا^{٢} ٣٠ – ١

٢) ظا^{٢} ٦٠ – ظا^{٢} ٤٥ = ٤ جا ٣٠

٣) جتا^{٢} ٦٠ = ٥ جا٣٠٢ – ظا^{٢} ٤٥

٤) ظا^{٢} ٦٠ – ظا^{٢} ٣٠ = $\frac{\text{١+ ظا ٦٠ ظا ٣٠}}{\text{جتا}^{٢}\text{ ٣٠}}$

---

٣) أوجد قيمة س فى كل ممايأتى :

١) ٢ جا س = ظا^{٢} ٦٠ – ٢ ظا ٤٥

٢) ٤ س = جتا^{٢} ٣٠ ظا^{٢} ٣٠ ظا^{٢} ٤٥

٣) ٢ جا س = جا ٣٠ جتا ٦٠ + جتا ٣٠ جا ٦٠

٤) س جا ٤٥ جتا ٤٥ ظا ٦٠ = ظا^{٢} ٤٥ – جتا٦٠٢

٥) ٣ ظا س – ٤ جا^{٢} ٣٠ = ٨ جتا^{٢} ٦٠

٦) جا^{٢} ٤٥ = جتا س ظا ٣٠

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

البعد بين نقطتين

بفرض ﻡ ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) ، ب ($س_{٢}$ ، $ص_{٢}$) نقطتين فى مستوى فإن :

طول ﻡ ب = $\sqrt{(س_{١} - س_{٢})^{٢} + (ص_{١} - ص_{٢})^{٢}}$

أى أن البعد بين نقطتين = $\sqrt{\text{مربع فرق السينات + مربع فرق الصادات}}$

مثال١ أوجد البعد بين النقطة ﻡ (٣ ، ٤) ، ب (٧ ، ١) الحـــــــــــــل

ﻡ ب = $\sqrt{(٣ - ٧)^{٢} + (٤ - ١)^{٢}}$

= $\sqrt{١٦ + ٩}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

مثال٢ أوجد البعد بين النقطة ﻡ (٧ ، ٢) ، ب (٣ طحا) الحـــــــــــــل

ﻡ ب = $\sqrt{(٧ - ٣)^{٢} + (٢ + ١)^{٢}}$

= $\sqrt{١٦ + ٩}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

تدريب أوجد البعد بين النقطة ﻡ (٣ ، ٦) ، ب طحا ، ٤) الحـــــــــــــل

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال إذا كان البعد بين نقطتين ا (٢،٤) ، ب (س ، –٢) يساوى ١٠ أحسب قيمة س

١٠ = $\sqrt{(٢ - س)^٢ + (٤ + ٢)^٢}$ بتربيع الطرفين

∴ $(١٠)^٢ = (٢ - س)^٢ + (٤ + ٢)^٢$

∴ ١٠٠ = ٤ + $س^٢$ – ٤ س +٣٦

∴ ١٠٠ = $س^٢$ – ٤ س + ٤٠

∴ $س^٢$ – ٤ س – ٦٠ = ٠

∴ (س –١٠) (س –٦) = ٠

∴ س = ١٠ أ، س = ٦

هام : ١) بعد النقطة (س ، ص) عن نقطة الاصل = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$

٢) بعد النقطة (س ، ص) عن محور الصادات نوجد |س|

٣) بعد النقطة (س ، ص) عن محور السينات نوجد |ص|

مثال١ أوجد البعد بين النقطة ا (–٣،٤) ونقطة الاصل الحــــــــل

ا و = $\sqrt{(-٣)^٢ + (٤)^٢}$ = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

مثال٢ بعد النقطة (–٢، –٤) عن محور السينات = |–٤| = ٤

مثال٣ بعد النقطة (–٦، ٣) عن محور الصادات = |–٦| = ٦

تدريب٢ أوجد البعد بين النقطة ا (–٥ ، ١٢) ونقطة الاصل الحــــــل

تدريب٣ بعد النقطة (–٣، –٥) عن محور السينات = ...

تدريب٤ بعد النقطة (٢، ٣) عن محور الصادات = ...

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٦ إذا كان البعد بين النقطة (س ، – س) عن نقطة الأصل $٣\sqrt{٢}$ وحدة طول أوجد قيمة س

$٣\sqrt{٢} = \sqrt{(س)^٢ + (-س)^٢}$ بتربيع الطرفين والتعويض بالقيم المعطاة

$\therefore (٣\sqrt{٢})^٢ = (س)^٢ + (-س)^٢$

$\therefore ١٨ = س^٢ + س^٢ = ٢س^٢$

$\therefore ١٨ = ٢س^٢$

$\therefore س^٢ = \frac{١٨}{٢}$ $\therefore س^٢ = ٩$ $\therefore س = \pm ٣$

تدريب ٥ إذا كان بعد النقطة أ (٤ ، ١) عن النقطة ب (١ ، ص) يساوى ٥ وحدات فأوجد قيمة ص .

تدريب ٦ البعد بين (أ ، ٠) ، (٠ ، ١) هو وحدة طول فإن أ = ...

تدريب ٧ قطر الدائرة التى مركزها (٨ ، ٥) ، وتمر بالنقطة (٤ ، ٢)

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

نتائج هامة

١) لإثبات أن أى ثلاثة نقاط تقع على استقامة واحدة نوجد البعد بين كل نقطتين ثم نثبت أن أكبر بعد يساوى مجموع البعدين الآخرين

٢) لأثبات أن النقاط س ، ص ، ع هى رؤوس مثلث نوجد الاطوال س ص ، ص ع ، س ع

ثم نثبت أن مجموع طولى أى ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث

٣) لتعين نوع المثلث س ص ع (حاد – قائم – منفرج) ليكن س ع أكبر أضلاع المثلث :

١) إذا كان $(س ع)^٢ > (س ص)^٢ + (ص ع)^٢$ فإن المثلث منفرج الزاوية فى ص

٢) إذا كان $(س ع)^٢ = (س ص)^٢ + (ص ع)^٢$ فإن المثلث قائم الزاوية فى ص

٣) إذا كان $(س ع)^٢ < (س ص)^٢ + (ص ع)^٢$ فإن المثلث حاد الزاوية فى ص

٤) لإثبات أن المثلث ٢ ب جـ متساوى الأضلاع نثبت أن ٢ ب = ب جـ = جـ ٢

٥) لإثبات أن المثلث ٢ ب جـ متساوى الساقين نثبت أن أى ضلعين متساويين

٦) لإثبات أن الشكل ٢ ب جـ ٤ متوازى أضلاع (نوجد ٤ أضلاع) ونثبت أن ٢ ب = جـ ٤ ، ب جـ = ٢ ٤

٧) لإثبات أن الشكل ٢ ب جـ ٤ معين (نوجد ٦ أضلاع) ونثبت أن ٢ ب = ب جـ = جـ ٤ = ٤ ٢

ثم نثبت أن القطران غير متساويان أى أن القطر ٢ جـ ≠ القطر ب ٤

٨) لإثبات أن الشكل ٢ ب جـ ٤ مستطيل (نوجد ٦ أضلاع) ونثبت أن ٢ ب = جـ ٤ ، ٢ ٤ = ب جـ

ثم نثبت أن القطر ٢ جـ = القطر ب ٤

٩) لإثبات أن الشكل ٢ ب جـ ٤ مربع (نوجد ٦ أضلاع) ونثبت أن ٢ ب = ب جـ = جـ ٤ = ٤ ٢

ثم نثبت أن القطر ٢ جـ = القطر ب ٤

١٠) لإثبات أن النقاط ٢ ، ب ، جـ ، ٤ تنتمى لدائرة مركزها م نثبت أن م ٢ = م ب = م جـ = م ٤ = نق

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ١ إثبت أن النقطة (٣ ، ٤) هى مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ حيث □

أ (٣ ، –١) ، ب (٦ ، ٨) ، جـ (–١ ، ١) وأوجد مساحتها ومحيطها .   الحـــــــل

م أ = √((٣ – ٣)² + (٤ + ١)²) = √(٠ + ٢٥) = ٥

م ب = √((٣ – ٦)² + (٤ – ٨)²) = √(٩ + ١٦) = ٥

م جـ = √((٣ + ١)² + (٤ – ١)²) = √(١٦ + ٩) = ٥

∴ م أ = م ب = م جـ = ٥   ∴ م هى مركز الدائرة   ∴ نق = ٥ سم

مساحة الدائرة = π نق² = ٢٢/٧ (٥)² = ٥٥٠/٧

، محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × ٢٢/٧ × ٥ = ٢٢٠/٧

مثال ٢ بين ما إذا ما كانت النقط أ (١ ، ٤) ، ب (٣ ، –٢) ، جـ (–٣ ، ١٦) □

تقع على أستقامة واحدة أم لا   الحـــــــل

أ ب = √((١ – ٣)² + (٤ + ٢)²) = √(٤ + ٣٦) = √٤٠ = ٢ √١٠

ب جـ = √((٣ + ٣)² + (–٢ – ١٦)²) = √(٣٦ + ٣٢٤) = √٣٦٠ = ٦ √١٠

أ جـ = √((١ + ٣)² + (٤ – ١٦)²) = √(١٦ + ١٤٤) = √١٦٠ = ٤ √١٠

∴ ب جـ = أ ب + أ جـ

∴ أ ، ب ، جـ تقع على أستقامة واحدة

أ/أحمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٣ إثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط أ (٥، -٥) ، ب (-١، ٧) ، جـ (١٥، ١٥) قائم الزاوية فى ب ثم أوجد مساحته .

الحـــــــل

أ ب = $\sqrt{(٥ + ١)^٢ + (-٥ - ٧)^٢}$ = $\sqrt{٣٦ + ١٤٤}$ = $\sqrt{١٨٠}$

أ جـ = $\sqrt{(٥ - ١٥)^٢ + (-٥ - ١٥)^٢}$ = $\sqrt{١٠٠ + ٤٠٠}$ = $\sqrt{٥٠٠}$

ب جـ = $\sqrt{(-١ - ١٥)^٢ + (٧ - ١٥)^٢}$ = $\sqrt{٢٥٦ + ٦٤}$ = $\sqrt{٣٢٠}$

∵ (أ جـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢ ∴ المثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى ب

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ب جـ × أ ب = $\frac{١}{٢}$ × $\sqrt{٣٢٠}$ × $\sqrt{١٨٠}$ = $\frac{١}{٢}$ × ٢٤٠ = ١٢٠ وحدة مربعة

مثال٤ إثبت أن النقاط أ (-١، ٤) ، ب (١، ١) ، جـ (-١، -٢) ، ء (-٣، ١) هى رؤوس معين وأوجد مساحته . ☐

الحـــــــل (نوجد ٦ أضلاع) ☐

أ ب = $\sqrt{(-١ - ١)^٢ + (٤ - ١)^٢}$ = $\sqrt{٤ + ٩}$ = $\sqrt{١٣}$

ب جـ = $\sqrt{(١ + ١)^٢ + (١ + ٢)^٢}$ = $\sqrt{٤ + ٩}$ = $\sqrt{١٣}$

جـ ء = $\sqrt{(-٣ + ١)^٢ + (١ + ٢)^٢}$ = $\sqrt{٤ + ٩}$ = $\sqrt{١٣}$

أ ء = $\sqrt{(-١ + ٣)^٢ + (٤ - ١)^٢}$ = $\sqrt{٤ + ٩}$ = $\sqrt{١٣}$

أ جـ = $\sqrt{(-١ + ١)^٢ + (٤ + ٢)^٢}$ = $\sqrt{٠ + ٣٦}$ = ٦

ب ء = $\sqrt{(١ + ٣)^٢ + (١ - ١)^٢}$ = $\sqrt{١٦ + ٠}$ = ٤

∵ أ ب = ب جـ = جـ ء = ء أ ، القطر أ جـ ≠ القطر ب ء ∴ الشكل أ ب جـ ء معين

مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ × حاصل ضرب القطرين = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٤ = ١٢ وحدة مربعة

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال إذا كانت ٲ (س ، ٣) ، ب (٣ ، ٢) ، جـ (٥ ، ١) وكانت ٲ ب = ب جـ فأوجد قيمة س

الحـــــــــــل

∵ ٲ ب = ب جـ

∴ $\sqrt{(س - ٣)^2 + (٣ - ٢)^2}$ = $\sqrt{(٣ - ٥)^2 + (٢ - ١)^2}$ بتربيع الطرفين

∴ $(س - ٣)^2 + (٣ - ٢)^2$ = $(٣ - ٥)^2 + (٢ - ١)^2$

∴ $س^2$ + ٩ - ٦س + ١ = ٤ + ١

∴ $س^2$ - ٦س + ١٠ = ٥

∴ $س^2$ - ٦س + ٥ = ٠

∴ (س - ١) (س - ٥) = ٠

∴ س = ١ ، س = ٥

تدريب ١ اثبت أن المثلث ٲ ب جـ الذى رؤوسه ٲ (١ ، ٤) ، ب (-١ ، -٢) ، جـ (٢ ، -٣) □

قائم الزاوية وأوجد مساحته □

تدريب ٢ أثبت أن النقاط ؍ (٣،–١) ، ب (–٤،٦) ، جـ (٢، –٢) تقع على الدائرة التى مركزها م (–١، ٢) ثم أوجد المحيط والمساحة

الحـــــل

تدريب ٣ إذا كان ؍ (٥، ٣) ، ب (٦، –٢) ، جـ (١، –١) ، ء (٠، ٤) إثبت أن الشكل ؍ ب جـ ء معين وأوجد مساحته

الحـــــل

تدريب ٤ إذا كان ؍ (–٣، ٠) ، ب (٣، ٤) ، جـ (١، –٦) أثبت أن المثلث ؍ ب جـ متساوى الساقين

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

تمارين على البعد بين نقطتين

١) أكمل ما يأتى :

١) البعد بين النقطتين (٣ ، ٣) ، (٢ ، ٢) يساوى ....

٢) البعد بين النقطة (–٣ ، ٤) ونقطة الاصل يساوى ....

٣) بعد النقطة (٠ ، –٣) عن محور الصادات = ... وحدة طول

٤) بعد النقطة (–٧ ، ٤) عن محور الصادات = ... وحدة طول

٥) بعد النقطة (–٥ ، ٠) عن محور السينات = ... وحدة طول

٦) بعد النقطة (٧ ، –٦) عن محور السينات = ... وحدة طول

٧) طول نصف قطر الدائرة التى مركزها (٧ ، ٤) وتمر بالنقطة (٣ ، ١) يساوى ....

٢) أوجد طول م ب ١) م (–١ ، ٥) ، ب (٤ ، ١) ٢) م (–٧ ، –٩) ، ب (–٣ ، –٥)

٣) إثبت أن النقاط الأتية تقع على أستقامة واحدة م (١ ، ٤) ، ب (٣ ، –٢) ، جـ (٧ ، ٥)

٤) بين نوع المثلث م (١ ، –١) ، ب (٢ ، ١) ، جـ (–٣ ، –٢)

٥) إثبت أن المثلث م ب جـ متساوى الأضلاع حيث م (٥ ، ٠) ، ب (٧ ، ٢ $\sqrt{٣}$) ، جـ (٣ ، ٢ $\sqrt{٣}$)

٦) إثبت أن النقاط م ، ب ، جـ ، ء هى رؤوس متوازى أضلاع حيث : م (–١ ، ١) ، ب (٠ ، ٥) ، جـ (٥ ، ٦) ، ء (٤ ، ٢)

٧) إثبت أن النقط : م (٣ ، ٣) ، ب (٠ ، ٣) ، جـ (٠ ، ٠) ، ء (٣ ، ٠) هى رؤوس مربع وأوجد مساحته

٨) إثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط م (٥ ، –٥) ، ء (–١ ، ٧) ، جـ (١٥ ، ١٥) قائم فى ب وأوجد مساحته

٩) إثبت أن النقاط م (٣ ، –١) ، ب (–٦ ، ٤) ، جـ (٢ ، –٢) تقع على دائرة مركزها م (–٢ ، ١) وأوجد محيطها

١٠) إذا كان البعد بين النقطتين م (٠ ، ك) ، ب (٤ ، ٠) يساوى ٥ وحدة طول فأوجد قيمة ك

١١) إذا كان البعد بين النقطتين (م ، ك) ، ب (–٢ ، ٣) يساوى ٥ وحدة طول فأوجد قيمة م

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

أحداثيات منتصف قطعة مستقيمة

بفرض ؃ ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) نقطتين فى مستوى فإن أحداثى منتصف المسافة بين ؃ ، ب

هو النقطة حيث جـ (س ، ص) = $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$

مثال١ أوجد أحداثى منتصف ؃ ب حيث ؃ (٤ ، ١) ، ب (–٢ ، –٣) الحـــــــــل

جـ = $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$ = $\left(\frac{٤ - ٢}{٢} ، \frac{١ - ٣}{٢} \right)$ = (١ ، –١)

مثال٢ إذا كان $\overline{؃ ب}$ قطراً فى الدائرة م حيث ؃ (٤ ، –١) ، ب (–٢ ، ٧) أوجد إحداثى نقطة م

الحـــــــــل م هى مركز الدائرة أى أن م منتصف $\overline{؃ ب}$

∴ م = $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$ = $\left(\frac{٤ - ٢}{٢} ، \frac{-١ + ٧}{٢} \right)$ = (١ ، ٣)

نق = ؃ م = $\sqrt{(١ - ٤)^٢ + (٣ + ١)^٢}$ = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = ٥

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٥ = $\frac{٢٢٠}{٧}$ وحدة طول

مثال٣ إذا كانت جـ منتصف $\overline{؃ ب}$ فأوجد س ، ص حيث ؃ (س ، ٣) ، ب (٦ ، ص) ، جـ (٤ ، ٦)

∵ النقطة (٤ ، ٦) منصف $\overline{؃ ب}$

∴ (٤ ، ٦) = $\left(\frac{س + ٦}{٢} ، \frac{٣ + ص}{٢} \right)$

∴ ٤ = $\frac{س + ٦}{٢}$ | ٦ = $\frac{٣ + ص}{٢}$

س + ٦ = ٨ | ٣ + ص = ١٢

∴ س = ٨ – ٦ = ٢ | ∴ ص = ١٢ – ٣ = ٩

تدريب١ أوجد منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين القطعة المستقيمة (٢، ٥) ، (٤، ٣) الحـــل

مثال٤ إذا كانت نقطة الاصل هى منتصف $\overline{ا ب}$ حيث ا (٥، –٢) فإن إحداثى ب هو .... (–٥، ٢)

تدريب٢ إذا كانت نقطة الاصل هى منتصف $\overline{ا ب}$ حيث ا (–٣، ١) فإن إحداثى ب هو ....

مثال٤ إذا كانت جـ (٢، ١) هى منتصف $\overline{ا ب}$ ، ب (٣، ٠) فأوجد ا الحـــــــل

بفرض ا = (س ، ص) ، النقطة (٢، ١) هى منتصف $\overline{ا ب}$

$$\therefore (٢، ١) = \left(\frac{س + ٣}{٢} ، \frac{ص + ٠}{٢}\right)$$

$$\therefore ٢ = \frac{س + ٣}{٢} \quad | \quad \therefore ١ = \frac{ص + ٠}{٢}$$

$$\therefore س + ٣ = ٤ \quad | \quad \therefore ص = ٢$$

$$\therefore س = ٤ - ٣ = ١$$

مثاله أوجد قيمة ا ، ب والتى تحقق أن (٢ا – ٣ ، ا – ب) منتصف القطعة المستقيمة التى طرفها (٧ ، –١) ، (٣، ٧) الحـــــل

∵ (٢ا – ٣ ، ا – ب) منتصف (٧ ، –١) ، (٣، ٧)

$$\therefore (٢ا - ٣ ، ا - ب) = \left(\frac{٧ + ٣}{٢} ، \frac{-١ + ٧}{٢}\right)$$

$$\therefore (٢ا - ٣ ، ا - ب) = (٥ ، ٣)$$

٢ا – ٣ = ٥	ا – ب = ٣ من المعادلة (١) عند ا = ٤
٢ا = ٥ + ٣	٤ – ب = ٣
٢ا = ٨	٤ – ٣ = ب
$\therefore$ ا = $\frac{٨}{٢}$ = ٤ (١)	$\therefore$ ب = ١

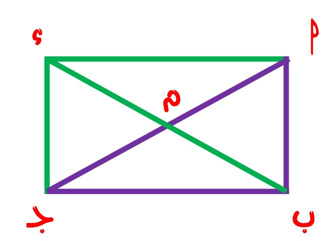
أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

تدريب٣ إذا كان جـ (٢ ، ١) منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (٣ ، ٤) أوجد احداثى ب

مثال٦ أثبت أن النقط : أ (٦ ، ٠) ، ب (٢ ، –٤) ، جـ (–٤ ، ٢) هى رأووس مثلث قائم الزاوية فى ب ، ثم أوجد إحداثى نقطة ء التى تجعل الشكل أ ب جـ ء مستطيلاً .

الحـــــــــل

(أ ب)^2 = (٢–٦)^2 + (–٤–٠)^2 = ١٦ + ١٦ = ٣٢



(ب جـ)^2 = (–٤–٢)^2 + (٢+٤)^2 = ٣٦ + ٣٦ = ٧٢

(أ جـ)^2 = (–٤–٦)^2 + (٢–٠)^2 = ١٠٠ + ٤ = ١٠٤

∵ (أ جـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب جـ)^2 ∴ أ ، ب جـ ء هى رؤوس مثلث قائم الزاوية فى ب

لإيجاد ء (س ، ص) التى تجعل أ ب جـ ء مستطيلاً ∵ المستطيل القطران ينصف كلاً منهما الآخر

∴ نقطة منتصف أ جـ هى نفس نقطة منتصف ب ء ، بفرض منتصف أ جـ هو م

∴ م = ($\frac{٦ - ٤}{٢}$ ، $\frac{٠ + ٢}{٢}$) = (١ ، ١) وحيث أن م منتصف ب ء بفرض ء = (س ، ص)

∴ (١ ، ١) = ($\frac{٢ + س}{٢}$ ، $\frac{-٤ + ص}{٢}$)

∴ ١ = $\frac{٢ + س}{٢}$ ١ = $\frac{-٤ + ص}{٢}$

٢ = ٢ + س ٢ = –٤ + ص

س = ٠ ٢ + ٤ = ص ∴ ص = ٦

∴ إحداثى ء (٠ ، ٦)

حل أخر لإيجاد النقطة ء إذا كان الشكل متوازى أضلاع أو مربع أو معين أو مستطيل

∴ ء = أ + جـ – ب = (٦ ، ٠) + (–٤ ، ٢) – (٢ ، –٤) = (٠ ، ٦)

تدريب٤ إذا كان أ ب جـ ء متوازى أضلاع أ (٣ ، ٢) ، ب (٤ ، –٥) ، جـ (٠ ، –٣) أوجد إحداثى ء ، نقطة تقاطع القطرين

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

تمارين على أحداثيات منتصف قطعة مستقيمة

١) أكمل مايأتى :

١) منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (١، ٣) ، (٠، – ٥) هى ....

٢) منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (٣، ١) ، (١، – ٥) هى ....

٣) $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة حيث أ (– ١، ٤) ، ب (٧، ٦) فيكون إحداثى مركز الدائرة ....

٤) إذا كانت نقطة الأصل هى منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (٥، – ٢) فإن أحداثى ب هو.......

٥) إذا كانت م (٢، ٧) هى نقطة تقاطع قطرى متوازى الاضلاع أ ب جـ ء حيث أ (٣، ١) فإن جـ هى ......

٦) إذا كانت أ (١، ٣) ، ب (٣، – ٥) فإن منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ هى ....

---

٢) إذا كانت ء (٣، – ٢) منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (س، ٢) ، ب (٣، ص) فأوجد قيمتى س ، ص

---

٣) إذا كانت ء (س٢ ، ص٢) منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (٥، – ٥) ، ب (– ٥، ٧) فأوجد قيمتى س ، ص

---

٤) إذا كانت النقط أ (٣، ٢) ، ب (٤، – ٣) ، جـ (– ١، – ٢) ، ء (– ٢، ٣) هى رؤوس معين فأوجد

١) إحداثى نقطة تقاطع القطرين ٢) مساحة المعين أ ب جـ ء

---

٥) إثبت أن النقط أ (٥، ٣) ، ب (٣، – ٢) ، جـ (– ٢، – ٤) ، هى رؤوس مثلث منفرج الزاوية فى ب ،

ثم أوجد إحداثى نقطة ء التى تعل الشكل أ ب جـ ء معيناً وأوجد مساحة سطحه .

---

٦) إثبت أن النقط أ (– ٣، ٠) ، ب (٣، ٤) ، جـ (١، – ٦) هى رؤوس مثلث متساوى الساقين رأسه أ ،

ثم أوجد طول القطعة المستقيمة المرسومة من أ عمودية على $\overline{\text{ب جـ}}$

---

٧) أ ب جـ ء مربع رؤوسه على الترتيب أ (٠، ٥) ، ب (٣، ٢) ، جـ (٠، – ١) ، ء (س، ص)

أوجد إحداثى النقطة ء .

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

ميل الخط المستقيم

ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين ($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$) يتعين من العلاقة :

الميل = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

مثال ١ أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (٤ ، ٧) الحـــــــل

الميل = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٧ - ٣}{٤ - ٢}$ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

مثال ٢ أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، -٣) ، (٥ ، ٤) الحـــــــل

الميل = $\frac{٤ + ٣}{٥ - ٢}$ = $\frac{٧}{٣}$

مثال ٣ أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (١ ، ٣) الحـــــــل

الميل = $\frac{٣ - ٣}{١ - ٢}$ = $\frac{٠}{-١}$ = ٠

تدريب ١ أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (٤ ، -١) ، (٥ ، -٣) الحـــــــل

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

إذا كان المستقيم يوازى محور السينات فإن الميل = صفر

إذا كان المستقيم يوازى محور الصادات فإن الميل = غير معرف

مثال ٤ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين ا (−٣، ٢) ، ب (−٢، ص) يوازى محور السينات فأوجد قيمة

∵ المستقيم يوازى محور السينات ∴ الميل = صفر

∴ $\frac{ص + ٢}{-٢ + ٣}$ = صفر

∴ ص + ٢ = ٠ ∴ ص = − ٢

مثال ٥ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين ا (−٦، −١) ، ب (س ، ٩) يوازى محور الصادات فأوجد قيمة س

∵ المستقيم يوازى محور الصادات ∴ الميل = غير معرف

∴ $\frac{٩ + ١}{س + ٦}$ = غير معرف

∴ س + ٦ = ٠ ∴ س = − ٦

مثال ٥ إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ص) ، ب (٥ ، ١) هو ٣ أوجد قيمة ص الحـــــل

∵ الميل = ٣

∴ $\frac{١ - ص}{٥ - ٣}$ = ٣ ∴ $\frac{١ - ص}{٢}$ = ٣

∴ ١ − ص = ٦

∴ − ص = ٦ − ١ ∴ − ص = ٥ ∴ ص = − ٥

تدريب ٢ إذا كان المستقيم ا ب ↔ يوازى محور السينات حيث ا (٨ ، ٣) ، ب (٢ ، ك) أوجد قيمة ك

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

الميل بمعلومية زاويه قياسها هـ : حيث الميل = ظا هـ

مثال أوجد ميل المستقيم الذى يصنع زاويه 45° الحـــــــل

الميل = ظا هـ = ظا ٤٥ = ١

مثال أوجد ميل المستقيم الذى يصنع زاويه 135° الحــــــل

الميل = ظا هـ = ظا ١٣٥ = −١

مثال ٥ أوجد قياس الزاويه التى يصنعها المستقيم الذى يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٥ ، ٦) الحــل

∵ ظا هـ = الميل

∴ ظا هـ = $\frac{٦ - ١}{٥ - ٣}$ ∴ ظا هـ = $\frac{٥}{٢}$ ∴ هـ = $68^\circ\ 11'\ 54''$

مثال ٦ أوجد قياس الزاويه التى يصنعها المستقيم الذى يمر بالنقطتين (٢ ، ٥ $\sqrt{3}$) ، (٤ ، ٧ $\sqrt{3}$)

∵ ظا هـ = الميل

∴ ظا هـ = $\frac{٧\sqrt{3} - ٥\sqrt{3}}{٤ - ٢}$ ∴ ظا هـ = $\frac{٢\sqrt{3}}{٢}$ = $\sqrt{3}$ ∴ هـ = 60°

تدريب ٣ أوجد قياس الزاويه التى يصنعها المستقيم الذى يمر بالنقطتين (−٢ ، ٣) ، (−٣ ، ٤)

مثال ٧ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، −١) ، (٦ ، ص) يصنع زاويه قياسها ٤٥ أوجد قيمة ص

∵ ظا هـ = الميل

∵ ظا ٤٥ = $\frac{ص + ١}{٦ - ٢}$

١ = $\frac{ص + ١}{٤}$ ∴ ص + ١ = ٤ ∴ ص = ٤ − ١ ∴ ص = ٣

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

الميل بمعلومية معادلة مستقيم : حيث أن المعادله هى $ا س + ب ص + جـ = ٠$

$$\text{الميل} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-ا}{ب}$$

مثال ٨ أوجد ميل المستقيم الذى معادلته : $٤ س + ٧ ص = ٠$ الحـــــــل

$$\text{الميل} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٤}{٧}$$

مثال ٩ أوجد ميل المستقيم الذى معادلته : $٣ ص - ٢ س = ١$ الحـــــــل

$$\text{الميل} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{٢}{٣}$$

تدريب ٤ أوجد ميل المستقيم الذى معادلته : $٢ س - ٣ ص + ١ = ٠$ الحـــــــل

مثال ١٠ أوجد ميل المستقيم الذى معادلته : $٣ س = ٢ص + ١$ الحـــــــل

$$\text{الميل} = \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{٣}{٢}$$

مثال ١٠ أوجد ميل المستقيم الذى معادلته : $٥ س = ٦ ص + ٧$ الحـــــــل

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

شرط توازى مستقيمان $ل_1$ ، $ل_2$

إذا كان $ل_1 // ل_2$ فإن ميل المستقيم الاول = ميل المستقيم الثانى $م_1 = م_2$

والعكس صحيح إذا كان $م_1 = م_2$ فإن $ل_1 // ل_2$

مثال ١ إثبت أن المستقيم الذى معادلته : ٤ س − ٧ ص = ٣ يوازى المستقيم الذى يمر بالنقطتين ٲ (−٤ ، ١) ، ب (٣ ، ٥)

الحـــــــــل

$م_1 = \frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٤}{-٧} = \frac{٤}{٧}$ ، $م_2 = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{٥ - ١}{٣ + ٤} = \frac{٤}{٧}$

∵ $م_1 = م_2$ ∴ المستقيمين متوازيين

مثال ٢ إثبت أن المستقيم المار ٲ (٣ ، ٦) ، ب (٥ ، ٨) يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٤٥° |

$م_1 = \text{ميل } \overleftrightarrow{ٲب} = \frac{٨ - ٦}{٥ - ٣} = \frac{٢}{٢} = ١$ ، $م_2 = \text{ظا } ٤٥ = ١$

∵ $م_1 = م_2$ ∴ المستقيمين متوازيين

مثال ٣ إثبت أن المستقيم الذى معادلته : ٣ س + ٢ ص = ٤ يوازى المستقيم الذى معادلته : ٤ ص = ٦ س

$م_1 = \frac{-٣}{٢}$ ، $م_2 = \frac{-٦}{٤} = \frac{-٣}{٢}$

∵ $م_1 = م_2$ ∴ المستقيمين متوازيين

مثال ٤ إذا كان المستقيمان ك س − ٢ص + ٣ = ٠ ، ٦ س + ٣ص − ٥ = ٠ متوازيان أوجد قيمة ك الحل

∵ المستقيمين متوازيين ∴ $م_1 = م_2$

$\frac{-ك}{-٢} = \frac{٦}{٣}$

∴ $-ك = \frac{-٢ \times ٦}{٣} = -٤$ ∴ $ك = ٤$

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال إذا كان المستقيم المار بالنقطتين أ (٤، ٢) ، ب (س، ٦) يوازى المستقيم المار بالنقطتين □ جـ (٠، ٥) ، ء (–١، ١) أحسب قيمة س وقياس الزاوية التى يصنعها $\overleftrightarrow{أب}$ مع الاتجاة الموجب □ لمحورالسينات

الحل

∵ المستقيمين متوازيين ∴ م١ = م٢

$$\frac{٦ - ٢}{س - ٤} = \frac{١ - ٥}{-١ - ٠}$$

$$\frac{٤}{س - ٤} = \frac{-٤}{-١}$$

$$∴ \frac{٤}{س - ٤} = ٤$$

∴ ٤ (س – ٤) = ٤

∴ ٤س – ١٦ = ٤ ∴ ٤س = ٤ + ١٦

٤س = ٢٠ ∴ $س = \frac{٢٠}{٤} = ٥$

لإيجاد الزاوية التى يصنعها $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ (٤، ٢) ، ب (٥، ٦)

$ظا هـ = \frac{٦ - ٢}{٥ - ٤} = \frac{٤}{١} = ٤$ ∴ هـ = ٥٤″ ١١′ ٦٨°

مثال أثبت أن النقاط أ (٢، ٣) ، ب (١ ، ١) جـ (٠ ، –١) تقع على استقامه واحده

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{١ - ٣}{١ - ٢} = ٢$ ، ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$ = $\frac{-١ - ١}{٠ - ١} = ٢$

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$ ، ب نقطه مشتركه ∴ النقاط أ ، ب ، جـ تقع على استقامه واحده

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٥ إذا كانت النقاط ٲ (١، ٣) ، ب (٤، ١) ، جـ (٥، ص) تقع على أستقامة واحدة أوجد قيمة ص

∵ ٲ ، ب ، جـ تقع على أستقامة واحدة

∴ ميل ٲ ب = ميل ب جـ

∴ $\frac{١ - ٣}{٤ - ١} = \frac{ص - ١}{٥ - ٤}$

∴ $\frac{-٢}{٣} = \frac{ص - ١}{١}$

∴ ٣ (ص – ١) = – ٢

∴ ٣ ص – ٣ = – ٢ ∴ ٣ ص = – ٢ + ٣ ∴ ٣ ص = ١ ∴ ص = $\frac{١}{٣}$

شرط تعامد مستقيمان ل$_١$ ، ل$_٢$

إذا كان ل$_١$ ⊥ ل$_٢$ فإن م$_١$ × م$_٢$ = –١

والعكس صحصيح إذا كان م$_١$×م$_٢$ = –١ فإن ل$_١$ ⊥ ل$_٢$

مثال ١ أثبت أن المستقيان ٢س + ٣ص = ١ عمودى على المستقيم ٣س = ١ + ٢ص الحـــــل

م$_١$ = $\frac{-٢}{٣}$ ، م$_٢$ = $\frac{٣}{٢}$

∵ م$_١$ × م$_٢$ = $\frac{-٢}{٣}$ × $\frac{٣}{٢}$ = –١ ∴ المستقيمين متوازيين

مثال٢ إذا كان ميل مستقيم = $\frac{٤}{٩}$ فإن ميل المستقيم العمودى عليه = ...$\frac{-٩}{٤}$......

مثال٣ أوجد ميل المستقيم العمودى على المستقيم المار بالنقطتين ٲ (٦، ٠) ، ب (–٤، ٢) الحـــــل

ميل $\overleftrightarrow{ٲ ب}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٢ - ٠}{-٤ - ٦}$ = $\frac{٢}{-١٠}$ = $\frac{-١}{٥}$

ميل العمودى = ٥

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

تدريب١ أوجد ميل المستقيم العمودى على المستقيم ٧س = ٥ص + ١ الحـــــل

مثال٣ إثبت أن المستقيم المار بالنقطتين أ (–٣ ، ٤) ، ب (–٤ ، ٥) عمودى على المستقيم

الذى يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات . الحـــل

ميل أ ب = م١ = $\frac{٥ - ٤}{-٤ + ٣}$ = $\frac{١}{-١}$ = –١

ميل المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٤٥° = م٢ = ظا ٤٥ = ١

∵ م١ × م٢ = –١ × ١ = –١ ∴ المستقيمان متعامدان

مثال٣ إذا كان المستقيم : أ س – ٢ ص + ٣ = ٠ عمودى على المستقيم : ٤ س + ص = ٩

أوجد قيمة أ الحـــل

∵ المستقيمان متعامدان ∴ م١ × م٢ = –١

∴ $\frac{-أ}{-٢}$ × $\frac{-٤}{١}$ = –١

∴ $\frac{٤أ}{-٢}$ = –١ ٤أ = ٢ أ = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

مثال٣ إثبت أن المثلث أ ب جـ حيث أ (–١ ، –١) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (٦ ، ٠) قائم الزاوية فى ب

ميل $\overleftrightarrow{أ ب}$ = $\frac{ص٢ - ص١}{س٢ - س١}$ = $\frac{٣ + ١}{٢ + ١}$ = $\frac{٤}{٣}$

ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ = $\frac{ص٢ - ص١}{س٢ - س١}$ = $\frac{٠ - ٣}{٦ - ٢}$ = $\frac{-٣}{٤}$

∵ م١ × م٢ = $\frac{٤}{٣}$ × $\frac{-٣}{٤}$ = –١ ∴ المستقيمان متعامدان ∴ ∠ ب قائمة

تلخيص هام :

- **لإثبات أن الشكل متوازى أضلاع نثبت إحدى الخواص الآتية :**

١) كل ضلعين متقابلين متوازيين أو ٢) كل ضلعين متقابلين متساويين

٣) القطران ينصف كل منهما الآخر أو ٣) ضلعان متقابلان متوازيان ومتساويان فى الطول

- **لإثبات أن الشكل مستطيل نثبت إحدى حالات متوازى الاضلاع ثم نثبت إحدى الحالتين**

١) القطران متساويان فى الطول أو ٢) ضلعان متجاوران فيه متعامدان

- **لإثبات أن الشكل معين نثبت إحدى حالات متوازى الاضلاع ثم نثبت إحدى الحالتين**

١) القطران متعامدان أو ٢) ضلعان متجاوران متساويان فى الطول

- **لإثبات أن الشكل مربع نثبت إحدى حالات متوازى الاضلاع ثم نثبت إحدى الحالتين**

١) ضلعان متجاوران فيه متعامدان ومتساويان فى الطول أو ٢) القطران متعامدان ومتساويان فى الطول

مثال إثبت أن النقاط ﻡ (٢ ، −٢) ، ب (٨ ، ٤) ، جـ (٥ ، ٧) ، ء (−١ ، ١) هى رؤوس مستطيل

الحـــــــل نثبت أولاً أنه متوازى الضلاع (القطران ينصف كل منهما الآخر)

منتصف $\overleftrightarrow{\text{ﻡ جـ}} = \left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{٢} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{٢} \right) = \left(\frac{٢ + ٥}{٢} ، \frac{-٢ + ٧}{٢} \right) = \left(\frac{٧}{٢} ، \frac{٥}{٢} \right)$ (١)

منتصف $\overleftrightarrow{\text{ب ء}} = \left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{٢} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{٢} \right) = \left(\frac{٨ - ١}{٢} ، \frac{٤ + ١}{٢} \right) = \left(\frac{٧}{٢} ، \frac{٥}{٢} \right)$ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ القطران ينصف كل منهما الآخر ∴ ﻡ ب جـ ء متوازى اضلاع

ثم نثبت حالة من حالات المستطيل لتكن (ضلعان متجاوران فيه متعامدان)

ميل $\overleftrightarrow{\text{ﻡ ب}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{٤ + ٢}{٨ - ٢} = \frac{٦}{٦} = ١$ ميل $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}} = \frac{٧ - ٤}{٥ - ٨} = \frac{٣}{-٣} = -١$

∴ $\text{م}_1 \times \text{م}_2 = ١ \times -١ = -١$ المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ﻡ ب}}$ ، المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ متعامدان ∴ ﻡ ب جـ ء مستطيل

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ١ إثبت أن النقاط ا (٧ ، ٤) ، ب (٣ ، -٢) ، جـ (٢ ، ٠) ، ء (٤ ، ٣) هى رؤوس شبة منحرف

الحـــــــل نثبت أنه يوجد ضلعين متقابلين متوازيين وضلعين أخرين غير متوازيين

ميل $\overleftrightarrow{اب}$ = $\frac{-٢ - ٤}{٣ - ٧}$ = $\frac{-٦}{-٤}$ = $\frac{٣}{٢}$

ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ = $\frac{٠ + ٢}{٢ - ٣}$ = $\frac{٢}{-١}$ = -٢

ميل $\overleftrightarrow{جـ ء}$ = $\frac{٣ - ٠}{٤ - ٢}$ = $\frac{٣}{٢}$

ميل $\overleftrightarrow{ا ء}$ = $\frac{٣ - ٤}{٤ - ٧}$ = $\frac{-١}{-٣}$ = $\frac{١}{٣}$

∵ ميل $\overleftrightarrow{اب}$ = ميل $\overleftrightarrow{جـ ء}$ ، ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ≠ ميل $\overleftrightarrow{ا ء}$

∴ ا ب جـ ء شبة منحرف

تدريب إذا كانت معادلتا المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ على الترتيب هما سطحص٤ص = ٠ ، ص = ك س + ٥

أوجد قيمة ك إذا كان ١) المستقيمان متوازيان ٢) المستقيمان متعامدان

---

١) $\overleftrightarrow{اب}$ // $\overleftrightarrow{جـ ء}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{اب}$ = $\frac{٣}{٤}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{جـ ء}$ = ...

٢) $\overleftrightarrow{اب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{جـ ء}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{اب}$ = $\frac{-٢}{٣}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{جـ ء}$ = ...

٣) $\overleftrightarrow{اب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{جـ ء}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{اب}$ = ٠.٥ فإن ميل $\overleftrightarrow{جـ ء}$ = ...

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

تمارين على ميل الخط المستقيم

١) أكمل ما يأتى :

١) ميل المستقيم الموازى لمحور السينات = ...

٢) ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات = ...

٣) ميل المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها 135° يساوى ....

٤) ميل المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها 45° يساوى ....

٥) إذا كان : $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـ ء}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٢}{٣}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{جـ ء}$ = يساوى ....

٦) إذا كان : $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{جـ ء}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{١}{٢}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{جـ ء}$ = يساوى ....

٧) ميل المستقيم الموازى للمستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (–٢ ، ٣) يساوى ....

٨) إذا كان أ ب جـ ء متوازى أضلاع حيث أ (–١ ، ٤) ، ب (٠ ، ١) فإن ميل $\overleftrightarrow{ء جـ}$ = ...

٩) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يوازى محور السينات حيث أ (٨ ، ٣) ، ب (٢ ، ك) فإن ك = ...

١٠) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يوازى محور الصادات حيث أ (م ، ٤) ، ب ((–٥ ، ٧) فإن م = ...

١١) إذا كان $م_١$ ، $م_٢$ متوازيين فإن ....

١٢) المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{٢}{٧}$ ، $\frac{-٧}{٢}$ يكونان ....

---

٢) أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم الذى ميله ١) ٠.٣ ٢) ١.٠٢٤٦

---

٣) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين أ (–٣ ، ٤) ، جـ (–٣ ، –٢) عمودى على المستقيم

المار بالنقطتين ب (١ ، ٢) ، ء (–٣ ، ٢)

---

٤) أوجد ميل المستقيم العمودى على المستقيم المار بالنقطتين أ (٢ ، –٣) ب (٣ ، ٥)

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

٥) إثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، –١) ، (٦ ، ٣) يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة

قياسها ٤٥° مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

---

٦) إثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (–١ ، –٧) ، (٢ ، –٤) عمودى على المستقيم الذى يصنع زاوية

موجبة قياسها ١٣٥° مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

---

٧) إذا كان المثلث الذى رؤوسه ا (٣ ، –١) ، ب (س ، ٣) ، جـ (٥ ، ٣) قائم الزوية فى ا فأوجد قيمة س

---

٨) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$ يوازى محور الصادات حيث ا (س ، ٧) ، ب (٣ ، ٥) فأوجد قيمة س

---

٩) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$ يوازى محور السينات حيث ا (٤ ، ٢) ، ب (–٥ ، ص) فأوجد قيمة ص

---

١٠) إذا كان المستقيم ل يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ك) ، المستقيم ل٢ يصنع زاوية ٤٥° مع الإتجاه

الموجب لمحور السينات فأوجد ك التى تجعل ١) المستقيمان متوازيان ٢) المستقيمان متعامدان

---

١١) إثبت أن النقاط ا (–١ ، ٤) ، ب (–٢ ، ٢) ، جـ (–٣ ، ٠) تقع على استقامة واحدة

---

١٢) إذا كان ا (–١ ، –١) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (٦ ، ٠) إثبت أن المثلث ا ب جـ قائم الزاوية فى ب

---

١٤) إثبت أن النقط ا (–١ ، ١) ، ب (٠ ، ٥) ، جـ (٤ ، ٢) ، ء (٥ ، ٦) هى رؤوس متوازى أضلاع

---

١٥) إثبت أن النقط ا (–١ ، ٣) ، ب (٥ ، ١٥) ، جـ (٦ ، ٤) ، ء (٠ ، ٦) هى رؤوس مستطيل

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

معادلة الخط مستقيم

الصورة العامة لمعادلة خط مستقيم هى : ص = م س + جـ

حيث الميل = م ، جـ طول الجزاء المقطوع من محور الصادات

مثال ١ أوجد معادلة المستقيم الذى ميله ٣ ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات وحدتين

∵ ص = م س + جـ

∴ ص = ٣ س + ٢

مثال ٢ أوجد معادلة المستقيم الذى ميله ٤ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات وحدتين الحـــل

∵ ص = م س + جـ ∴ ص = ٤ س - ٣

مثال ٣ أوجد معادلة المستقيم الذى ميله ٤ ويمر بالنقطه (-١ ، ٥) الحـــــــل

∵ ص = م س + جـ

ص = ٤ س + جـ

النقطه (-١ ، ٥) تحقق المعادلة ٥ = ٤ × -١ + جـ

٥ = -٤ + جـ ∴ جـ = ٥ + ٤ = ٩

المعادلة هى ∴ ص = ٤ س + ٩

مثال ٣ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (-٣ ، ٢) ، (٠ ، ٧) الحـــــــل

∵ ص = م س + جـ

م = $\frac{٧ - ٢}{٠ + ٣}$ = $\frac{٥}{٣}$ ∴ المعادلة هى ص = $\frac{٥}{٣}$ س + جـ

∵ النقطه (٠ ، ٧) تحقق المعادلة ∴ ٧ = $\frac{٥}{٣}$ × ٠ + جـ ∴ جـ = ٧

∴ المعادلة هى ص = $\frac{٥}{٣}$ س + ٧ بضرب المعادلة × ٣ ٣ ص = ٥ س + ٢١

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٤ أوجد معادلة المستقيم الذى يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (– ٣ ، ٥) الحـــل

∵ ص = ~~م س~~ + جـ

∵ المستقيم يوازى محور السينات ∴ الميل م = ٠

∴ ص = جـ

∵ النقطة (– ٣ ، ٥) تحقق المعادلة ∴ ٥ = جـ ∴ ص = ٥

مثال ٥ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (– ٢ ، ١) ويوازى المستقيم ٣ ص – ٢ س + ٧ = ٠ الحــل

∵ ص = م س + جـ

ميل المستقيم المعطى = $\frac{٢}{٣}$ ∴ المعادلة هى ص = $\frac{٢}{٣}$ س + جـ

∵ النقطة (– ٢ ، ١) تحقق المعادلة ∴ ١ = $\frac{٢}{٣}$ × – ٢ + جـ

١ = $\frac{-٤}{٣}$ + جـ

جـ = ١ + $\frac{٤}{٣}$ = $\frac{٧}{٣}$

∴ المعادلة هى ص = $\frac{٢}{٣}$ س + $\frac{٧}{٣}$ بضرب المعادلة × ٣ ∴ ٣ ص = ٢ س + ٧

مثال ٦ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (– ٣ ، – ٥) وعمودى على المستقيم س = ١١ – ٣ ص الحــل

∵ ص = م س + جـ

ميل المستقيم المعطى م = $\frac{١}{-٣}$ = $\frac{-١}{٣}$ ∴ ميل المستقيم المطلوب = ٣

∴ المعادلة هى ص = ٣ س + جـ

∵ النقطة (– ٣ ، – ٥) تحقق المعادلة ∴ – ٥ = ٣ × – ٣ + جـ

∴ – ٥ = – ٩ + جـ ∴ جـ = – ٥ + ٩ = ٤

∴ المعادلة هى ص = ٣ س + ٤

أ/ أحمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٧ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ١) ويصنع زاوية ٤٥° مع اتجاه الموجب لمحور السينات

∵ ص = م س + جـ

م = ظا ٤٥ = ١ ∴ المعادلة هى ص = س + جـ

∵ النقطة (٣ ، ١) تحقق المعادلة ∴ ١ = ١ × ٣ + جـ

جـ = ١ - ٣ = -٢ ∴ المعادلة هى **ص = س - ٢**

مثال ٨ إذا كان أ (٥ ، -٦) ، ب (٣ ، ٧) ، جـ (١ ، -٣) فأوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة أ وبنقطة منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

الحـــــــل

ليكن ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ = $\left(\frac{٣ + ١}{٢} ، \frac{٧ - ٣}{٢} \right)$ = (٢ ، ٢)

∵ ص = م س + جـ

وبالتالى المستقيم يمر بالنقطتين أ (٥ ، -٦) ، ء (٢ ، ٢)

ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ = $\frac{٢ + ٦}{٢ - ٥}$ = $\frac{٨}{-٣}$ = $\frac{-٨}{٣}$

∴ المعادلة هى ص = $\frac{-٨}{٣}$ س + جـ

∵ النقطة (٢ ، ٢) تحقق المعادلة ٢ = $\frac{-٨}{٣}$ × ٢ + جـ ٢ = $\frac{-١٦}{٣}$ + جـ

جـ = ٢ + $\frac{١٦}{٣}$ = $\frac{٢٢}{٣}$

∴ المعادلة هى ص = $\frac{-٨}{٣}$ س + $\frac{٢٢}{٣}$ بالضرب فى ٣

٣ ص = - ٨ س + ٢٢

أ/أحمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٩ أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بمنتصف أب حيث ٫ (٣ ، ٦) ، ب (ـ١ ، ٤) وعمودى على المستقيم الذى معادلته ٢ص ـ ٤س + ١ = ٠

الحـــــل

∵ ص = م س + جـ

منتصف ٫ ب = $\left(\frac{٣ - ١}{٢} ، \frac{٦ + ٤}{٢} \right)$ = (١ ، ٥)

ميل المستقيم المعطى = $\frac{٤}{٢}$ = ٢ ميل العمودى = $\frac{-١}{٢}$

∴ المعادلة هى ص = $\frac{-١}{٢}$ س + جـ

∵ النقطة (١ ، ٥) تحقق المعادلة ∴ ٥ = $\frac{-١}{٢}$ × ١ + جـ

∴ ٥ = $\frac{-١}{٢}$ + جـ ∴ جـ = ٥ + $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١١}{٢}$

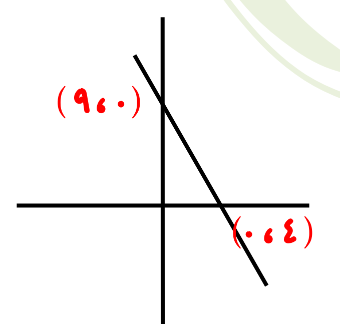
∴ المعادلة هى ص = $\frac{١١}{٢}$ س + $\frac{٢٢}{٣}$ بالضرب فى ٢

٢ص = ـ س + ١١

مثال ١٠ أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محورى الاحداثيات السينى والصادى جزءين موجبين طولاهما ٤ ، ٩ على الترتيب

الحـــــل

∵ ص = م س + جـ



م = $\frac{٩ - ٠}{٠ - ٤}$ = $\frac{٩}{-٤}$ = $\frac{-٩}{٤}$

∴ المعادلة هى ص = $\frac{-٩}{٤}$ س + جـ

∴ المعادلة هى ص = $\frac{-٩}{٤}$ س + ٩

مثال ١١ أوجد معادلة محور تماثل القطعة المستقيمة س ص حيث س (٣ ، ـ٢) ، ص (ـ٥ ، ٦)

منتصف س ص = $\left(\frac{٣ - ٥}{٢} ، \frac{-٢ + ٦}{٢} \right)$ = (ـ١ ، ٢)

ميل س ص = $\frac{٦ + ٢}{-٥ - ٣}$ = $\frac{٨}{-٨}$ = ـ١ ∴ ميل العمودى = ١ أكمل

ص س

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

تمارين على معادلة الخط مستقيم

١) أكمل مايأتى :

١) إذا كان المستقيمان : ٣ س – ٤ ص – ٣ = ٠ ، ك ص + ٤ س – ٨ = ٠ متعامدين فإن ك = ...

٢) إذا كان المستقيمان س + ص = ٥ ، ك س + ٢ ص = ٠ متوازيين فإن ك = ...

٣) المستقيم الذى معادلته ٢ س – ٣ ص – ٦ = ٠ يقطع من محور الصادات جزءاً طوله = ...

٤) المستقيم الذى معادلته ٢ س + ٥ ص – ١٠ = ٠ يقطع من محور السينات جزءاً طوله = ...

٥) المستقيم الذى معادلته ٣ س – ٣ ص + ٥ = ٠ يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات = ...

٦) معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، ٥) ويوازى محور السينات هى ....

٧) المستقيم الذى ميله = ٢ ويقطع محور الصادات عند النقطة (٠ ، ٣) معادلته هى ....

---

٢) أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات

١) ص = ٥ س – ٣ ٢) ٢ س – ٣ ص – ٦ = ٠ ٣) $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$

---

٣) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله ٢ ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات ٧ وحدات

٤) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله صفر ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات وحدتين

٥) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله $\frac{١}{٢}$ ويمر بالنقطة (٠ ، – ٣)

٦) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله = – ٢ ويمر بنقطة الأصل

٧) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من الجزء السالب لمحور الصادات جزءاً طوله ٣ وحدات ويوازى المستقيم الذى معادلته ٢ س – ٣ ص = ٦

٨) أوجد معادلة المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

٩) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، –١) ، (١ ، ١)

١٠) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، –٥) ويوازى المستقيم س = ٧ – ٢ ص

١١) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (–٢ ، ٣) عمودياً على المستقيم الذى معادلته ص = $\frac{1}{2}$ س – ٥

١٢) أوجد معادلة محور تماثل القطعة المستقيمة س ص حيث س (٣ ، –٢) ، ص (–٥ ، ٦)

١٣) إثبت أن المستقيم الذى معادلته ٢ س + ص + ٨ = ٠ عمودياً على المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (–١ ، ٢)

١٤) ا ب جـ ء مربع فيه ا (٥ ، ٤) ، جـ (–١ ، ٦) فأوجد معادلة $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$

مع أطيب الأمنيات بالنجاح والتفوق

ولاتنسونا من صالح دعائكم

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩